两圆方程相减所得直线方程研究

JachinShen

2017 年 9 月 9 日

1 前言

有两圆：

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2 \tag{1}$$

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2 \tag{2}$$

$(2)-(1)$，得到直线方程：

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y=r_1^2-r_2^2+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2$$

但是现在似乎看不出这条直线的几何意义

2 探索与尝试

让我们重新看看这个圆的方程：

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$$

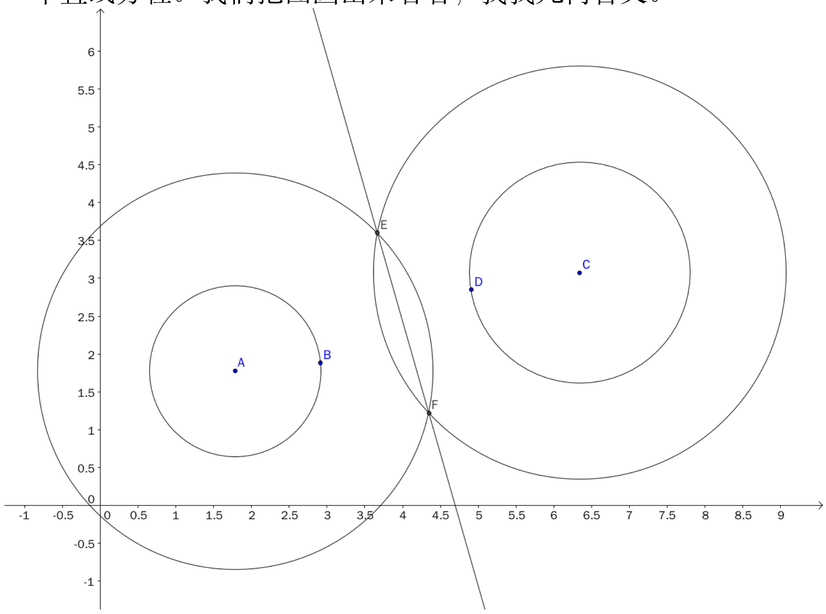
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$$

为什么没有交点？因为半径不够大。那能不能把半径弄大点又不影响直线方程呢？答案是有的：

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2+t^2$$

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2+t^2$$

在两条方程右边同时加了 t^2，这样既可以看作一个更大的圆，相减时又是同一个直线方程。我们把图画出来看看，找找几何含义。

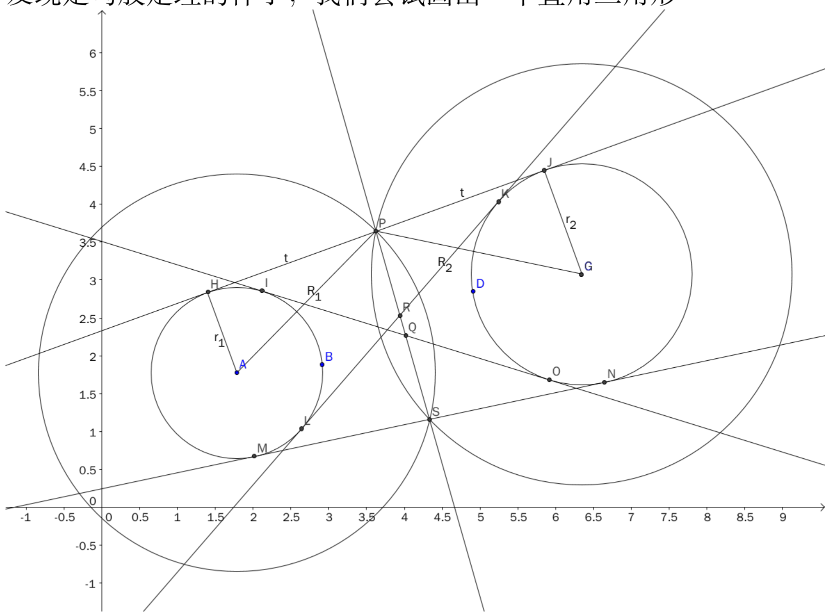


把大圆画出来，直线就是大圆的公共割线。用 R_1, R_2 表示大圆的半径，观察下面两个等式：

$$r_1^2 + t^2 = R_1^2$$

$$r_2^2 + t^2 = R_2^2$$

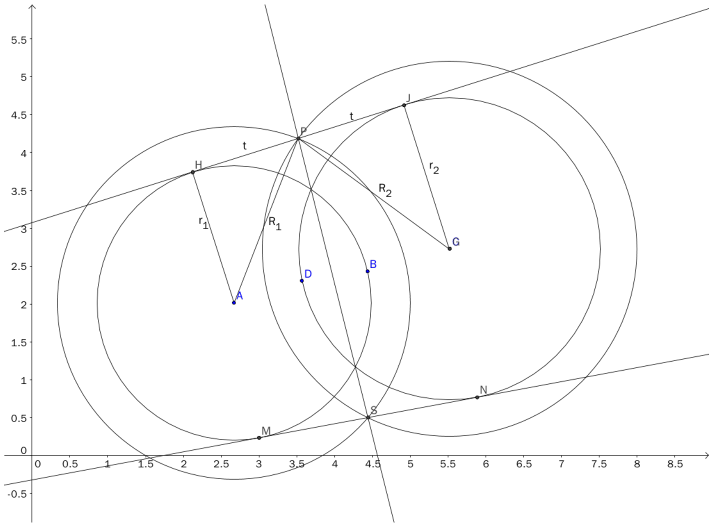
发现是勾股定理的样子，我们尝试画出一个直角三角形：



最后在切线的地方找到了直角，并且粗略看，这条直线貌似平分了公共切线。实际上，的确平分了公共切线，由图可得 $t = R_1^2 - r_1^2 = R_2^2 - r_2^2$，因而的确是中点。

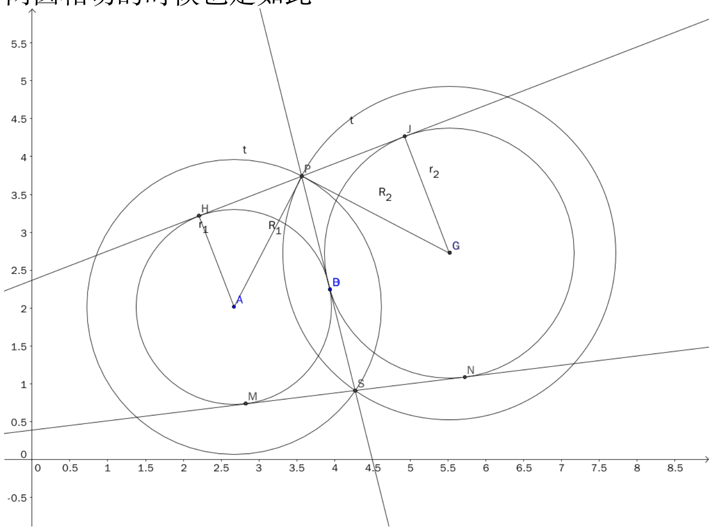
因为两个相离的圆有四条公共切线，所以这四条切线的中点刚好都在这条直线上，形成了完美的四点共线。

再想想，这个结论能不能兼容原来的结论？答案是可以的。



两圆相交的时候，公共切线剩下两条，这条直线也正好经过公共切线的中点。

两圆相切的时候也是如此：



3 总结

两圆相交、相切或相离的时候，圆方程相减得到的直线方程为两圆公共切线中点的连线。